期 末 复 习

- 考试题型

1. 客观题（填空或选择）39分左右

2. 主观题 61分左右

A. 全概率与贝叶斯公式

B. (连续型)已知二维联合概率密度，求：边缘概率密度、协方差、相关系数、判断独立性、相关性等

(离散型)已知二维联合分布律，求：边缘分布律、协方差、相关系数、判断独立性、相关性等

亦或 根据条件，求联合分布律（或联合概率密度）等

C. 点估计（矩估计和最大似然估计）

[离散型、连续性]

(已知具体概率分布或常见分布)

D. 显著性检验（单个正态总体、均值和方差、双边还是单边？）

E. 马氏链（已知状态空间、初始分布以及一部转移概率矩阵，求多步转移概率矩阵、有限维分布、条件分布以及判断遍历性、求极限分布等）

F. 平稳过程（判断是否平稳？求平均功率；判断是否具有各态历经性；求功谱密度等）

主观题示例

A. 全概率与贝叶斯公式

全概率公式： 若B_1,B_2,B_3构成样本空间的一个划分，则

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)$$

贝叶斯公式： 若事件A已经发生，求是由于B_2发生引起的概率，即

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}$$

$$=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+P(B_3)P(A|B_3)}$$

例　某电信服务部有100部相同信号的电话机待售，其中60部是甲厂生产的，30部是 乙厂生产的，10部是丙厂生产的. 已知这三个厂生产电话机的不合格率分别为0.1、0.2,、0.3. 一位顾客从这批话机中随机拿了一部，且这部电话机的厂标已经脱落. 试问：

（1）顾客拿到不合格电话机的概率是多少?

（2）顾客试用后发现电话机不合格，这部电话机是甲厂生产的概率是多少?

解： 设事件A={顾客取到不合格电话机}，Bi={由i厂生产},i=甲，乙，丙，则$B_{甲}$,$B_{乙}$,$B_{丙}$构成样本空间的一Ω个划分.

(1)由全概率公式，所求

$$P(A)=P(B_{甲})P(A\mid B_{甲})+P(B_{乙})P(A\mid B_{乙})+P(B_{丙})P(A\mid B_{丙})$$

$$=0.6\times0.1+0.3\times0.2+0.1\times0.3=0.15;$$

(2) 由Bayers公式，所求

$$P(B_{甲}|A)=\frac{P(B_{甲})P(A|B_{甲})}{P(A)}=\frac{0.6\times0.1}{0.15}=\frac{2}{5}.$$

练习 假设患肺结核的人通过透视胸部能被确诊的概率为0.95，而未患肺结核的人通过透视胸部被误诊为病人的概率为0.002. 根据以往资料显示，某单位职工患肺结核的概率为0.001. 现在该单位有一个职工经过透视被诊断为肺结核，求这个人确实患有肺结核的概率.

解 设A={该职工患肺结核}，

B={通过透视可诊断为肺结核}，则 A与$\overline{A}$ 构成样本空间的一个划分,且已知

$$P(B\mid A)=0.95, P(B\mid \overline{A})=0.002, P(A)=0.001.$$

所求$P(A|B)=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})}$

$$=\frac{0.001\times 0.95}{0.001\times 0.95+0.999\times 0.002}=\frac{475}{476}.$$

2．假设患肺结核的人通过透视胸部能被确诊的概率为 0.95，而未患肺结核的人通过透视胸部被误诊为病人的概率为 0.002．根据以往资料表明，某单位职工患肺结核的概率为 0.001。现在该单位有一个职工经过透视被诊断为患肺结核，求这个人确实患肺结核的概率．

3．已知男子有 5%是色盲患者，女子有 0.25%是色盲患者．今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人．

（1）求此人是色盲患者的概率 ；

（2）若此人恰好是色盲患者，问此人是女性的概率是多少?

4．有两箱同类的零件，第一箱装 50 只，其中 10 只一等品；第二箱装 30 只，其中 18 只一等品．今从两箱中任挑一箱，然后从该箱中取零件两次，每次取一只，作不放回抽样．求（1）第一次取到的零件是一等品的概率；（2）在第一次取到的零件是一等品的条件下，第二次取到的零件也是一等品的概率．

得分

二、在数字通信中，信号是由数字 0 和 1 的长序列组成的．由于随机干扰，当发出信号 0 时，收到的信号为 0 和 1 的概率分别是 0.8 和 0.2；当发出信号 1 时，收到的信号为 0 和 1 的概率分别是 0.1 和 0.9．现假设发出 0 和 1 的概率分别为 0.6 和 0.4．试求（1）收到一个信号，它是 1 的概率；（2）收到信号 1 时，发出的信号确实是 1 的概率．(9 分)

2. 口袋里装有 $a+b$ 枚硬币，其中 b 枚硬币是废品(两面都是国徽)．从口袋中随机地取出 1 枚硬币，并把它独立地抛 n 次，结果发现向上的一面全是国徽，试求这枚硬币是废品的概率．

3. 设某工厂生产的每台仪器以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需要进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂，以概率 0.20 定为不合格品不能出厂．现在该厂生产了 $n\,(n\geq 2)$ 台仪器，求所有仪器都能出厂的概率．

得 分

二、某年级有甲、乙、丙三个班级，各班人数分别占年级总人数的 $\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{5}{12}$，已知甲、乙、丙三个班级中集邮人数分别占该班总人数的 $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，试求：（1）从该年级中随机地选取一个人，此人为集邮者的概率；（2）从该年级中随机地选取一个人，发现此人为集邮者，那么此人属于乙班的概率．(8 分)

B. (连续型)已知二维联合概率密度，求：边缘概率密度、 协方差、相关系数、 判断独立性、相关性等

(离散型)已知二维联合分布律，求：边缘分布律、 协方差、相关系数、 判断独立性、相关性等

例　袋中有2只白球3只黑球，现从中摸两次，每次摸一球，分别采用有无放回两种摸球方式，令

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次摸出白球},\\ 0, & \text{第一次摸出黑球},\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{第二次摸出白球},\\ 0, & \text{第二次摸出黑球}.\end{cases}$$

求X和Y的联合分布律与边缘分布律.

解（1）有放回摸球，结果如下：

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=x_i)$
0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

(2)不放回摸球，结果如下：

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=x_i)$
0	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=y_j)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

练习：

设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，且 $U=\begin{cases}0, X\le \ln 2\\ 1, X>\ln 2\end{cases}$，

$V=\begin{cases}0, X\le \ln 3\\ 1, X>\ln 3\end{cases}$，试求 (U,V) 的分布律，并判断 U,V 是否独立．（10 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的分布律为：

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0.1	0.1	0.1
1	0.3	0.1	0.3

1）判别 X 与 Y 是否相互独立？ 2）求 $Cov(X,Y)$，3） $E(X^2Y)$

例. 已知随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 2, & 0<x<y, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

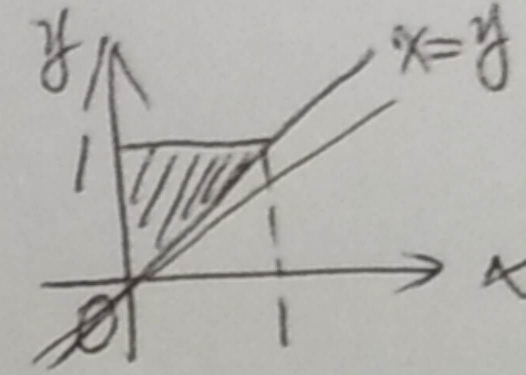
（1）求两个边缘概率密度，并判断X与Y是否独立?

（2）判断X与Y是否相关?

不独立，相关

(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases}\int_x^1 2\,dy=2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$



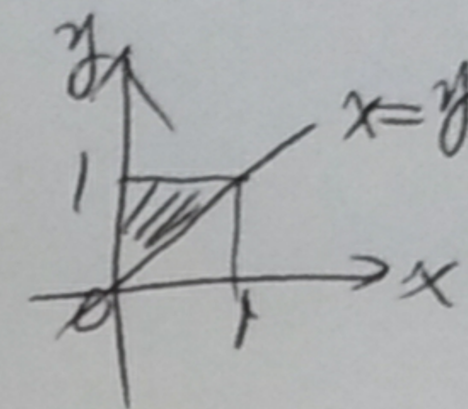
$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases}\int_0^y 2\,dx=2y, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$\because f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

$\therefore$ 不独立

(2) $E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\,f(x,y)\,dx\,dy$



$$=\int_0^1\left[\int_x^1 2xy\,dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{4}$$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)\,dy$

$$=\int_0^1\left[\int_x^1 2x\,dy\right]dx=\frac{1}{3}$$

(或 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_X(x)\,dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)\,dx=\frac{1}{3}$)

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)\,dy$

$$=\int_0^1\left[\int_x^1 2y\,dy\right]dx=\frac{2}{3}$$

(或 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_Y(y)\,dy=\int_0^1 2y^2\,dy=\frac{2}{3}$)

$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\neq 0$

进而 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\neq 0$ ∴ 相关.

练习：

1. 已知随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）判断X与Y是否独立?

（2）判断X与Y是否相关?

2. 已知随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}, & x^2+y^2\le 4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1）判断X与Y是否独立?

（2）判断X与Y是否相关?

四、二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,-y<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$，(1) 求$f_X(x),f_Y(y)$，并判断X,Y是否相互独立？ (2) 求$Cov(X,Y)$，并判断X,Y是否相关？

得分

四、设随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1) 求$f_X(x)$； (2) 计算$Cov(X,Y)$；(3) 计算$E(XY^2)$．(10 分)

得 分

四、二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<1,-y<x<y\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$，(1) 求$f_X(x),f_Y(y)$，并判断X,Y是否相互独立？ (2) 求$Cov(X,Y)$，并判断X,Y是否相关？ (12 分)

得 分

三、（6 分）设(X,Y)的密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

1）求$f_X(x)$；2）在$0<x<1$时，求$f_{Y|X}(y|x)$.

C. 点估计（矩估计和最大似然估计）

[离散型、连续性]

(已知具体概率分布或常见分布)

例 设总体X具有分布律

X	1	2	3
p	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中θ ($0<\theta<1$)为未知参数. 已知取到一组样本值

$x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=2,$

试求参数θ的矩估计值和极大似然估计值.

解：(1)矩估计：

$$E(X)=1\times\theta^2+2\times 2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2$$
$$=3-2\theta,$$

令 $$3-2\theta=\overline{X},$$

解得 $$\widehat{\theta_{矩}}=\frac{3-\overline{X}}{2},$$

此处，样本均值 $\overline{x}=\frac{1}{4}(1+2+3+2)=2,$

从而θ 的矩估计值为 $\frac{1}{2}.$

（2） 极大似然估计：

似然函数

$$L(\theta)=P(X=x_1)P(X=x_2)P(X=x_3)P(X=x_4)$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-\theta)^2\cdot 2\theta(1-\theta)$$

$$=4\theta^4(1-\theta)^4,$$

对数似然函数为 $\ln L(\theta)=\ln 4+4\ln\theta+4\ln(1-\theta)$,

令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{4}{\theta}-\dfrac{4}{1-\theta}=0$, 解得

参数θ 的极大似然估计值为 $\dfrac{1}{2}$.

例　设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本，已知

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\quad \text{其中 } \theta>0,$$

求 θ的矩估计和最大似然估计.

解　　（1）矩估计：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}\,dx=\frac{\theta}{\theta+1}.$$

令 $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$，得 $\hat{\theta}_{矩}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

（2）MLE： 似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}\quad \begin{matrix}(0<x_i<1)\\ 1\le i\le n\end{matrix}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

求导并令其为0

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

从中解得

$$\hat{\theta}_L=-n\Big/\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

即为θ的最大似然估计值．

练习：

得 分

六、已知总体 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$，即 $X\sim\pi(\lambda)$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自该总体 X 的一个简单随机样本，试求参数 λ 的矩估计量和最大似然估计量.（10 分）

分

六、设总体 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\theta 2^{\theta} x^{-(\theta+1)}, & x>2 \\ 0, & x\le 2\end{cases}$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应的样本值，求参数 $\theta\,(\theta>1)$ 的矩估计量和最大似然估计量.（10 分）

设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 未知．$x_1,\ldots,x_n$ 是来自 X 的样本值，试求 μ,σ^2 的最大似然估计量．

D. 显著性检验（单个正态总体、均值和方差、双边还是单边？）

例 设某产品的某项质量指标服从正态分布，已知它的标准差 $\sigma = 150$，现从一批产品中随机抽取了 26 个，测得该项指标的平均值为 1637，问能否认为这批产品的该项指标值为 1600（$\alpha = 0.05$）？

解：(1)提出假设：$H_0: \mu = \mu_0$=1600，$H_1: \mu \neq \mu_0$

(2)检验统计量： $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$

(3)拒绝域： $|z| \geq z_{\alpha/2} = 1.96$

(4)实测值： $|z| = \left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| = 1.258$

(5)判断：1.258<1.96，未落入拒绝域，故接受H_0。即可以认为这批产品的该项指标值为1600。

练习：

七、设某工厂生产的产品尺寸服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（单位略），参数均未知．现在从该厂抽得 16 件产品，经测量并计算得 $\bar{x}=198.2$，$s=3$．在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，试检验产品尺寸的均值是否为 120．（7 分）

得分

七、一台包装机包装白糖，包得的袋装白糖的重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，当机器正常时，其均值为 $\mu=1$ 公斤，标准差 $\sigma=0.03$ 公斤．某日开机后，为检验包装机是否正常，随机抽取白糖 9 袋，经测量与计算得 $\bar{x}=0.95$，假设标准差 σ 不变．在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，试检验均值是否为 1 公斤．(7 分)

得 分

五、（7 分）某厂生产的一种灯管其寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现测得 25 只样本的寿命，计算得 $\bar{x}=1650$，$s=300$，问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为灯管的平均寿命为 1500（小时）。

（$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.05}(24)=1.7109$）

例：某厂生产的某种型号的电池，其寿命长期以来服从方差 5000 (小时^2)的正态分布，现有一批这种电池，从它的生产情况来看，寿命的波动性有所改变，现随机取26只电池，测出其寿命的样本方差 $s^2 = 9200$(小时^2)。问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化

（取 $\alpha = 0.02$）？

解：(1)提出假设：$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 5000, H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

(2)检验统计量：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

(3)拒绝域：$\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1) = 44.314$或

$\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) = 11.524$

(4)实测值：$\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = 46$

(5)判断：46 >44.314，落入拒绝域，故拒绝H_0。即认为这批电池寿命波动性较以往的有显著的变化。

得 分

五、（7 分）某厂生产的一种灯管其寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现测得 16 只样本的寿命，计算得 $\overline{x}=1800$，$s=400$，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验假设 $H_0:\sigma^2\le 300^2$，$H_1:\sigma^2>300^2$

（$\chi^2_{0.025}(15)=24.996$，$\chi^2_{0.05}(15)=27.488$）

得 分

六、测定某种溶液中的某种元素的含量，它的 23 个测定值给出 $s^2=0.09^2$，设测定值总体服从正态分布，总体方差 σ^2 未知，试在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验方差是否是 0.11^2．（$\chi^2_{0.025}(22)=36.781$　$\chi^2_{0.975}(22)=10.982$）　（8 分）

E. 马氏链（已知状态空间、初始分布以及一部转移概率矩阵，求多步转移概率矩阵、有限维分布、条件分布以及判断遍历性、求极限分布等）

例 设齐次马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间为 $I=\{0,1,2\}$，初始分布为 $\vec{p}(0)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，且其一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

求：（1）$P_{12}(2)$； (2) $P(X_0=0, X_2=2)$；

(3) $P(X_2=2)$；

(4) $P(X_0=0, X_1=1, X_2=2)$； (5) $\vec{p}(2)$

(6)证明此链是遍历的，并求其极限分布.

参考答案:

$$P(2)=P^2=\begin{pmatrix} 3/8 & 1/2 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \end{pmatrix}$$

$(1)1/4;\quad (2)1/32;\quad (3)1/4;\quad (4)1/32;$

$(5)\vec{p}(2)=\vec{p}(0)P(2)=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4});$

$(6)\pi=(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}).$

练习：

得 分

六、（12 分）设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间$I = \{1,2,3\}$，初始分布为$\vec{p}(0) = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

（1）求$P(X_0 = 2, X_2 = 1)$，　（2）证明此链具有遍历性，并求其极限分布。

得 分

六、（12 分）设齐次马氏链$\{X_n, n \geq 0\}$的状态空间$I = \{1,2,3\}$，初始分布为$\vec{p}(0) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$，其一步转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

（1）证明此链具有遍历性，（2）求$P(X_1 = 1)$，（3）求$P(X_1 = 1,\ X_2 = 3,\ X_4 = 2)$

得 分

七、(10 分)设马氏链 $X(t)$ 的状态空间 $I=\{1,2,3\}$，初始分布为：$p_1(0)=1/4$，$p_2(0)=1/2$，$p_3(0)=1/4$，一步转移概率矩阵为：$P=\begin{pmatrix}1/4 & 3/4 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/4 & 3/4\end{pmatrix}$

(1) 求$P\{X_0=1,X_1=2,X_2=2\}$；(2) 说明此链是否遍历？(3) 求$P\{X_2=2\}$.

得 分

六、(10 分) 设马氏链$\{X_n,n\geq 0\}$的状态空间$I=\{0,1,2\}$，初始分布为$\vec{P}(0)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，且其一步转移概率矩阵为$\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$，

（1）说明此链是否遍历；（2）求$P(X_2=1)$；（3）求$P(X_0=0,X_2=1)$.

F. 平稳过程（判断是否平稳？求平均功率；判断是否具有各态历经性；求功谱密度等）

例： 设 $X(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$

$(-\infty < t < +\infty)$ ，ω_0 为常数， A、B为相互独立的随机变量， 且

$$A \sim N(0,\sigma^2) \quad , \quad B \sim N(0,\sigma^2)$$

（1） 证明 $X(t)$ 是平稳过程；

（2） 证明 $X(t)$ 具有均值各态历经性；

（3） 求 $X(t)$ 的平均功率；

（4） 求 $X(t)$ 的谱密度。

解：(1) $E[X(t)]=E(A)\cos\omega_0 t+E(B)\sin\omega_0 t$

$=0$ 为常数；

$$R_X(t,t+\tau)=E\{[A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t]$$

$$\cdot[A\cos\omega_0(t+\tau)+B\sin\omega_0(t+\tau)]\}$$

$$=E(A^2)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau)$$

$$+E(B^2)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

$=\sigma^2\cos\omega_0\tau$ 仅与 τ 有关。

故 $X(t)$ 是平稳过程。

定义 1 设 $X(t)$ 是平稳过程；

（1）若

$$< X(t) >= E[X(t)] = \mu_X$$

以概率1成立，则称 $X(t)$ 的均值具有各态历经性；

（2）若

$$< X(t)X(t+\tau) >= E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$$

以概率1成立，则称$X(t)$的自相关函数具有各态历经性；

（3）如果$X(t)$的均值和自相关函数都具有各态历经性，则称$X(t)$是各态历经过程，或称 $X(t)$ 是遍历的。

$$< X(t) >= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt.$$

$$< X(t)X(t+\tau) >= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t+\tau)dt.$$

(1)

$$<X(t)>=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[A\cos(w_0t)+B\sin(w_0t)\right]dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}A\cos(w_0t)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}2\int_{0}^{T}\cos(w_0t)dt$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{A}{w_0}\frac{\sin(w_0T)}{T}=0=E\left[X(t)\right].$$

所以此平稳过程具有均值各态历经性；

或（2）

$$\because \quad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{2T}(1-\frac{\tau}{2T})\sigma^2\cos(\omega_0\tau)d\tau$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{\sigma^2}{T}\cdot\frac{1-\cos 2\omega_0 T}{2T\omega_0^2}=0$$

所以此平稳过程具有均值各态历经性；

（3） 平均功率：

2 $\psi_X^2=R_X(0)=\sigma^2$

（4） $S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2\cos\omega_0\tau e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{2}(e^{i\omega_0\tau}+e^{-i\omega_0\tau})e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{\sigma^2}{2}\cdot 2\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$=\pi\sigma^2[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

$$a\cos(w_0\tau)\leftrightarrow a\pi\left[\delta\left(w-w_0\right)+\delta\left(w+w_0\right)\right]$$

$R_X(\tau)$	$S_X(w)$
$e^{-a\|\tau\|}\cos(w_0\tau)$	$\frac{a}{a^2+(w_0+w)^2}+\frac{a}{a^2+(w_0-w)^2}$
$e^{-a\|\tau\|}$	$\frac{2a}{a^2+w^2}$
$\delta(\tau)$	1
1	$2\pi\ \delta(w)$
$a\cos(w_0\tau)$	$a\pi\left[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)\right]$

练习：

得 分

七、（12 分）设随机过程 $X(t)=\sin(\omega_0 t+\Theta)$, 其中 ω_0 为常数，$\Theta \sim U(0,2\pi)$，（1）证明 $X(t)$ 是平稳过程；（2）均值是否各态历经？（3）求 $X(t)$ 的平均功率。

得 分

七、（12 分）设随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t) \quad (t\geq 0)$，其中 ω_0 为常数，A,B 是相互独立的随机变量且同分布于 $N(0,2)$，

（1）证 $X(t)$ 是平稳过程,（2）$X(t)$ 的均值是否各态历经?（3）求 $X(t)$ 的平均功率

得 分

七、(12 分）设随机过程 $Y(t)=X\sin(t+\Theta), t\in R$，其中 X 与 Θ 相互独立且 $X\sim U(-3,3)$, $\Theta\sim U(0,2\pi)$. (1)证明：$Y(t)$ 是平稳过程；（2）求 $Y(t)$ 的平均功率；(3) 判断 $Y(t)$ 的均值是否具有各态历经性?

得 分

八、(12 分）设随机过程 $X(t)=A\cos(2t+\Theta), t\in R$，其中 A 与 Θ 相互独立且 $A\sim B(10,0.1)$, $\Theta\sim U(0,2\pi)$. (1)证明：$X(t)$ 是平稳过程；（2）求 $X(t)$ 的谱密度 $S_X(\omega)$；(3) 判断 $X(t)$ 的均值是否具有各态历经性?

小知识点复习

一、事件的概念、运算及性质

1. 事件的表示

例　设A,B,C表示三个事件，则“A,B,C中至少有两个发生”可表示为 $AB\cup AC\cup BC$

练习：1. 设A,B,C表示三个事件，则“A,B,C中至多有两个发生”可表示为 $\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$

2.设A,B,C表示三个事件，则“A不发生, B和C发生”可表示为 $\overline{A}BC$

3.设A,B,C表示三个事件，则“A, B，C中至少有一个发生”可表示为 $A\cup B\cup C$

2. 事件的运算

例 已知 $P(A)=0.6, P(B)=0.3, P(A\cup B)=0.7,$

则 $P(A|B)=$ ___2/3___ $, P(A\overline{B})=$ ___0.4___

练习：1. 已知 $P(A)=0.6, P(B)=0.3, P(A-B)=0.4,$

则 $P(A\overline{B})=$ ___0.4___

2. 设事件A,B互不相容，且$P(A)$=0.1, $P(B)$=0.2,则

$P(\overline{A}B)=$ ___0.2___

3. 设A,B为两个随机事件，且有包含关系，已知

$P(A)=0.6, P(\overline{B})=0.7,$ 那么$P(A\overline{B})=$ ___0.3___

4. 已知 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=0.2,$ 且$P(A)+P(B)=0.6,$

则 $P(AB)=$ ___0.2___

3. 事件加法公式及对偶律

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

例 设A,B,C为三个事件，且$P(A)=P(B)=P(C)=1/4$, $P(BC)=0$, $P(AB)=P(AC)=1/8$,则A,B,C都不发生的概率为 1/2

练习： 1. 若事件A,B互不相容,则 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$ 1

4. 古典概型、贝努里概型及条件概率模型

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\ \ k=0,1,\cdots,n.$$

例 一射手对同一目标独立进行三次射击，若至少击中一次的概率为26/27, 则该射手的命中率为 ___2/3___

例 从1到10中任取3个号码，则最小号码为5的概率为 ___1 /12___

练习：1. 一批产品中有8个正品2个次品，任取两次，每次一个，取后不放回，则两次取出都是次品的概率为 ___1/45___

6. 事件独立性

事件A与B独立 $\Longleftrightarrow$ $P(AB)=P(A)P(B)$

思考n个事件的独立性

一个结论

A与B, A与$\overline{B}$, $\overline{A}$与B, $\overline{A}$与$\overline{B}$

中有一对独立成立，则其它三对亦独立.

7. 随机变量及分布函数

- 随机变量是定义在样本空间上的函数，其取值具有一定的随机性；

- 分布函数刻画随机变量的概率分布，定义为

$$F(x) = P(X \le x)$$

是定义在R上的一个普通函数，其性质包括：

定义域，值域；单调不减型；右连续；

$$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1.$$

结论：连续性随机变量的分布函数一定连续；

而离散型随机变量的分布函数为分段函数.

例　设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & 若x<0,\\ A\sin x, & 若0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & 若x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $P(|X|<\dfrac{\pi}{6})=$ ____1/2____

8. 离散型和连续性随机变量

- 分布律（或密度函数）及性质
- 分布函数
- 常见分布

例1. 设随机变量X服从参数为1的泊松分布，则

$$P(X=DX)=\underline{\quad e^{-1} \quad}$$

例2. 已知随机变量 $X \sim B(20,0.2)$, 则(1) $E(X^2)=$ \underline{19.2}

(2)要使得$P(X=k)$最大，则 $k=$ \underline{4}

例3. 设X服从指数分布，且 $E(X)=2$,则$P(X>1)=$ $\underline{e^{-1/2}}$

例4. 设随机变量X与Y相互独立，且$X \sim N(2\mu, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu, \sigma_2^2)$. 若$P(X-Y>1)=0.5$，则 $\mu=$ ___1___

例5. 已知X与Y不相关，且 $X \sim \pi(3), Y \sim U(-2,4)$，则 $E(XY)=$ ___3___

例6. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则$P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le z_{0.975}) =$ ___0.025___

例7. 已知随机变量X的分布律为

X	-1	0	2
P	0.25	0.5	0.25

则 (1)$P(X<1)=$ ___0.75___ (2) $E(3X^2-5)=$ ___-5/4___

(3)X的分布函数 $F(x)=$ ______

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-1, \\ 0.25, & -1 \le x < 0, \\ 0.75, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases}$$

练习：1. 已知随机变量X服从泊松分布，且$E(X)$=3, 则$P(X=0)$= $\underline{\quad e^{-3} \quad}$

2. 设 $X \sim N(2,\sigma^2)$, 且$P(2<X<4)=0.3$, 则$P(X \le 0)=$ $\underline{0.2}$

3. 设X服从指数分布，且$E(X)$=3, 则 $P(3<X<6)=$ $\underline{e^{-1}-e^{-2}}$

4. 设X与Y相互独立，且 $X \sim \pi(3), Y \sim \pi(5)$,

则 $P(X+Y=0)=$ $\underline{\quad e^{-8} \quad}$

5. 已知随机变量 $X \sim N(0,3), Y \sim U(1,2)$, 且$X$与$Y$相互独立，则$D(X/3-2Y+1)=$ $\underline{\quad 2/3 \quad}$

6. 设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| \le z_{0.025}\right)=$ $\underline{0.95}$

9. 随机变量函数的分布

例1. 设随机变量$X \sim N(0,1)$, 则$Y=|X|$ 的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0, \\ 0, & y\le 0. \end{cases}$

例2. 设随机变量X~$U(0,1)$,则随机变量$Y=e^X$的概率密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1<y<e, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

例3. 已知X与Y相互独立，均服从参数为4的指数分布，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数$F(z)$= $\begin{cases} 1-e^{-8z}, & z>0, \\ 0, & z\le 0. \end{cases}$

例4. 设随机变量 X服从参数为 1 的指数分布，则

$E(e^{-5X})=$ ___1/6___ .

练习：1. 已知$X\sim U(-1,0)$,则(1) $Y=X^2$的概率密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) $Z=2X+1$的概率密度函数$f_Z(z)=\begin{cases}1/2, & -1<z<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

2. 设X，Y独立同分布，X的分布函数为$F(x)$，则

$Z=\max\{X,Y\}$的分布函数$F_Z(z)=$ $[F(z)]^2$

3．*设随机变量*X与Y相互独立都服从参数$\lambda=1$的指数分布，则$Z=\min(X,Y)$的分布函数为$F(z)$=

$$F(z)=\begin{cases}1-e^{-2z} & z>0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

11. 协方差、相关系数等

$$Cov(X,Y)=E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

特别地，

$$Cov(X,X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}=D(X)$$

$$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}\quad\left(|\rho_{XY}|\le 1\right)$$

例1 已知随机变量 $X \sim U(-1,1)$，则 X与 $Y=|X|$的相关系数 $\rho_{XY}=$ ____0____

例2 将长度为1的木棒随机地截成两段，则这两段长度的相关系数为 ____-1____

练习 1. 设 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x, 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 则

$\rho_{XY}=$ __0__

2. 设随机变量(X,Y)的方差 $D(X)=4$，$D(Y)=1$，相关系数 $\rho_{XY}=0.6$，则$Cov(X,Y)=$ ____1.2____

12. 抽样分布定理

例1 在总体$X\sim\pi(3)$中随机地抽取一容量为15的简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{15}$，$\overline{X}$与S^2分别为样本均值与样本方差，则

$$D\left(\overline{X}\right)=\underline{\ 1/5\ },E(S^2)=\underline{\ 3\ }.$$

例2 设$X_1,X_2,\cdots,X_{12}$为来自总体$N(0,1)$的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$$\overline{X}\sim\underline{N(0,1/12)},\quad \frac{5(X_1^2+X_2^2)}{\sum_{i=3}^{12}X_i^2}\sim\underline{F(2,10)}.$$

例3 (1)已知随机变量 $F\sim F(7,6)$，则 $1/F\sim$ $\underline{\quad F(6,7)\quad}$

(2) 设随机变量 $T\sim t(5)$，则随机变量 $T^2\sim$ $\underline{\quad F(1,5)\quad}$，

$\dfrac{1}{T^2}\sim$ $\underline{\quad F(5,1)\quad}$.

例4 已知 $X_1, X_2, \ldots, X_9$ 是来自正态总体N(0,2)的样本，则 $D(S^2)=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

练习：1. 在总体 $X\sim\chi^2(8)$ 中随机地抽取一容量为16的简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{16}$，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$$E\left(\overline{X}\right)=\underline{\ 8\ },\ D\left(\overline{X}\right)=\underline{\ 1\ },\ E(S^2)=\underline{\ 16\ }.$$

13. 无偏估计

例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体$X\sim B(m,p)$的简单随机样本，已知 $\overline{X}^2 - cS^2$ 是 m^2p^2 的无偏估计量，则 $c =$ ___1/n___ .

练习：1. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2), X_1, X_2, X_3$ 是来自总体X的样本，已知 $0.3X_1 + aX_2 + 0.4X_3$是μ的无偏估计量，则$a=$ ___0.3___

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，已知 $\overline{X}^2 - aS^2$是μ^2 的无偏估计量，则$a=$ ___1/n___

14. 置信区间

例1 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，μ, σ^2均未知，$\overline{X}, S^2$为样本均值和样本方差，则 μ 的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$$

例2 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的样本，μ, σ^2均未知，$\overline{X}, S^2$为样本均值和样本方差，则 σ^2的置信水平为$1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

练习 1.设正态总体X的方差为1，根据来自X的容量为64的简单随机样本，得样本均值为4，则X的期望 μ 的置信水平为0.95的置信区间是 $\underline{(3.755, 4.245)}$

已知 $z_{0.025} = 1.96.$

17. 切比雪夫（Chebyshev）不等式

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

例 设随机变量X的均值为 μ，方差为 σ^2，则由切比雪夫不等式有 $P(|X-\mu|<3\sigma)\geq$ ___8/9___

练习：1. 设 $X\sim B(100,0.5)$，则由切比雪夫不等式得

$$P(|X-50|<10)\geq \underline{\quad 3/4 \quad}$$

2. 设随机变量X服从参数为2的泊松分布，则应用切比雪夫不等式估计得 $P(|X-2|\geq 2)\leq$ ___1/2___

依概率收敛

设$Y_1,Y_2,\cdots Y_n,\cdots$是一个随机变量序列，$a$是一个常数.若对于任意正数$\varepsilon$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - a| < \varepsilon\} = 1$$

则称序列$Y_1,Y_2,\cdots Y_n,\cdots$依概率收敛于$a$.记为

$$Y_n \xrightarrow{P} a.$$

三个大数定律

独立随机变量序列

大数定律

切比雪夫大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$ $\begin{cases} E(X_k)=\mu \\ D(X_k)=\sigma^2 \end{cases}$

贝努里大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{N_A}{n}-p|<\varepsilon\}=1$ $N_A \sim B(n,p)$

辛钦大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$ $E(X_k)=\mu$

例 设 n_A是n次 独立重复试验A发生的次数，$P(A)=p$, 则对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{n_A}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right\}= \underline{\quad 0 \quad}$$

三个中心极限定理（掌握前两个即可）

中心极限定理

- **独立同分布中心极限定理**

$$\begin{cases} E(X_k)=\mu,\quad D(X_k)=\sigma^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2) \end{cases}$$

- **棣莫弗–拉普拉斯中心极限定理**

$$\begin{cases} N_A \sim B(n,p) \\ \Rightarrow N_A \overset{\text{近似地}}{\sim} N(np, np(1-p)) \end{cases}$$

- **李雅普诺夫中心极限定理**

$$\begin{cases} E(X_k)=\mu_k, D(x_k)=\sigma_k{}^2 \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} X_k \overset{\text{近似地}}{\sim} N(\sum_{k=1}^{n}\mu_k, B_n{}^2) \end{cases}$$

注 随机变量$X_1, X_2, \cdots$是相互独立的

例 已知随机变量 $X \sim B(100, 0.01)$, 用中心极限定理计算

$$P(X \leq 1) \approx \underline{\quad 1/2 \quad}$$

练习 1. 设 $X \sim B(500, 0.2)$, 则由中心极限定理有

$$P(X > 100) \approx \underline{\quad 1/2 \quad}$$

2. 设 $X \sim B(100, 0.5)$, 则由中心极限定理有

$$P(40 < X < 60) \approx \underline{\quad 0.9544 \quad}$$

(已知 $\Phi(2) = 0.9772$)

3. 在n重贝努里试验中，设N_A为事件A发生的次数，每次试验事件A发生的概率为$P(A)=p$, 则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{N_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = \underline{\quad 1 \quad}$ （2）由中心极限定理可得

$$\lim_{n\to\infty} P(1 < \frac{N_A - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2) = \underline{\Phi(2) - \Phi(1)}$$

4\. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为相互独立的随机变量，且

$$E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2, i = 1, 2, \cdots, n,$$

则当n充分大时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$近似地服从正态分布$\underline{N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})}$

2、泊松过程的定义

定义1：设 $X(t), t \geq 0$ 是一个独立增量的计数过程，如果对任意的 $0 \leq s < t$，增量 $X(t) - X(s) \sim \pi(\lambda(t-s))$ 且 $X(0) = 0$，则称 $X(t), t \geq 0$ 是一强度为 λ 的泊松过程.

定义2：设 $X(t), t \geq 0$ 是计数过程，且满足以下条件：

1) $X(t)$ 是独立增量过程；

2) 对充分小的 Δt 有

$$P_1(t, t+\Delta t) = P(X(t, t+\Delta t) = 1) = \lambda \Delta t + o(\Delta t),\ \lambda > 0 \text{ 为常数.}$$

3) 对充分小的 Δt 有

$$\sum_{j=2}^{\infty} P_j(t, t+\Delta t) = \sum_{j=2}^{\infty} P(X(t, t+\Delta t) = j) = o(\Delta t);$$

4) $X(0) = 0$.

则称计数过程 $X(t), t \geq 0$ 是强度为 λ 的泊松过程.

3、泊松过程的统计特性

$X(t), t \geq 0$ 是一强度为 λ 的泊松过程.

均值函数

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[X(t) - X(0)] = \lambda t; \quad \text{即} \quad \mu_X(t) = \lambda t$$

注：$\lambda = \dfrac{E(X(t))}{t}$ 即 λ 表示单位时间内出现质点数的期望.

方差函数

$$D_X(t) = D(X(t)) = D(X(t) - X(0)) = \lambda t$$

协方差函数

$$C_X(s,t) = D_X(\min(s,t)) = \lambda \min(s,t)$$

相关函数

$$R_X(s,t) = C_X(s,t) + \mu_X(s)\mu_X(t) = \lambda \min(s,t) + \lambda^2 s t$$

1、维纳过程的定义

定义：设 $W(t), t \geq 0$ 是二阶矩过程，且满足以下条件：

1) $W(t)$ 是独立增量过程；

2) 对任意的 $0 \leq s < t$，增量

$$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s)), \text{ 且 } \sigma > 0;$$

3) $W(0) = 0$,

则称其为维纳过程.

2、维纳过程的统计特性

$W(t), t>0$ 是一维纳过程，$W(t)-W(0)\sim N(0,\sigma^2 t)$

均值函数

$$\mu_W(t)=E[W(t)]=E[W(t)-W(0)]=0;$$

方差函数

$$\sigma_W^2(t)=D[W(t)]=D[W(t)-W(0)]=\sigma^2 t;$$

协方差函数

$$C_W(s,t)=D_W(\min(s,t))=\sigma^2\min(s,t);$$

相关函数

$$R_W(s,t)=C_W(s,t)=\sigma^2\min(s,t).$$

1、设$\{X(t), t\geq 0\}$是参数$\sigma^2=3$的维纳过程，则$C_X(2,7)=$______

2、设随机过程 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是强度为 1 的泊松过程， 则 $C_X(3,6)=$_____；
$P\{X(1)=1, X(3)=3\}=$__________

3、设 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程，且对任意的 $t_2>t_1\geq 0$，有 $E[X(t_2)-X(t_1)]=2(t_2-t_1)$，则 $\lambda=$_____； $P\{X(4)=6\,|\,X(1)=2\}=$______

4、设$\{X(t),\ t\geq 0\}$是强度为 3 的泊松过程， 则 $P\{X(1)=2, X(3)=4\}=$__________

5、对于平稳过程$X(t)$，若____________________以概率 1 成立，则称$X(t)$的自相关函数具有各态历经性。

6、已知平稳过程$X(t)$的$R_X(\tau)=\cos 2\tau$，则谱密度$S_X(\omega)=$__________

7、已知平稳过程$X(t)$的谱密度$S_X(\omega)=\dfrac{2}{1+\omega^2}$，则$R_X(\tau)=$________